# **מתמטיקה בדידה – סמסטר א תשע"ב – תרגיל 9 – עקרון ההכלה וההדחה**

### שאלה 1 סעיף א: כמה מספרים שלמים בתחום אינם מתחלקים באף מספר מהמספרים ?

נסמן את הקבוצות (מתוך העולם ): היא קבוצת המספרים בתחום זה המתחלקים ב. הקבוצה הדרושה לנו היא:

דרך אחרת היא לפתור באופן ישיר: בכל 30 מספרים טבעיים עוקבים ישנם 8 מספרים שאינם מתחלקים בהנ"ל (והם אלו השקולים-מודולו-30 לאחד המספרים הבאים: ) ולכן כשנקח את המספרים נראה מיד שיש בהם מספרים רצויים, ועוד המספרים , ובסה"כ: 1334.

### שאלה 2

**בכיתה 30 סטודנטים . כולם דוברי עברית.**

**15 סטודנטים מהכיתה דוברים אנגלית.**

**13 סטודנטים מהכיתה דוברים צרפתית.**

**10 סטודנטים מהכיתה דוברים ערבית.**

**שבעה סטודנטים מהכיתה דוברים אנגלית וצרפתית.**

**שני סטודנטים מהכיתה דוברים את כל השפות.**

**כל דובר ערבית דובר גם צרפתית או אנגלית.**

**כמה סטודנטים מהכיתה דוברים עברית בלבד?**

**הדרכה:**

**סמן/י:  - קבוצת הסטודנטים דוברי אנגלית,  - קבוצת הסטודנטים דוברי צרפתית ו - קבוצת הסטודנטים דוברי ערבית והפעל את עיקרון ההכלה וההדחה לקבלת הנדרש.**

**לצורך המשך החישוב הוכח/י שאם  אז , הפעל/י שנית את עקרון ההכלה וההדחה וחשב/י את הנותר לחישוב.**

נסמן , ומכאן

טענה (מתוקנת מעט):

הוכחה: ראשית נשים לב שע"פ דה-מורגן מתקיים: .

יהי , צ"ל כי הוא איבר ב, ואכן זהו חיתוך של עם קבוצה המכילה את . מ.ש.ל. א.

יהי , צ"ל כי הוא איבר ב, וזה מתקיים ע"פ הגדרת החיתוך. מ.ש.ל. ב.

מ.ש.ל.

ע"פ עקרון ההכלה וההדחה ובצירוף השויון הנ"ל מתקיים:

נ.ב. עם קצת התחכמות גילינו שהנתון על דוברי כל השפות הוא מיותר, וכל הסיפור על דוברי הערבית בא רק לבלבל את המוח שלנו והוא לא הוסיף שום נתון. מי שלא מאמין – שיצייר דיאגרמת וון ויראה שהערבית לא מוסיפה שום מידע...

### שאלה 3

**א.מהו מספר התמורות של 22 אותיות הא"ב שמכילות לפחות אחת מהמילים: ראש, יד, רגל, שער ?**

הוא כל התמורות של הא"ב . נסמן את התמורות שמכילות "ראש". הן התמורות המכילות "יד". הן התמורות המכילות "רגל", ו הן התמורות המכילות "שער".

**ב. מהו מספר התמורות של אותיות המילה mathematics אשר אינן מכילות אפילו אחת מהמילים mat, tea, the ?**

הוא כל התמורות של המילה, אשר יש בה 3 אותיות שמופיעות פעמיים , ועוד 5 אותיות בודדות ולכן נקבל שבסה"כ . נסמן את התמורות שמכילות "the". הן התמורות המכילות "tea". הן התמורות המכילות "mat".

לחישוב נשים לב שעלינו להפחית ("הכלה והדחה") את התמורות בהן מופיע הצירוף mat פעמיים (כמו במילה המקורית).

לחישוב (וכן ) נפריד בין המקרים שמופיע הצירוף (או – בהתאמה), לבין המקרים שמופיע כל צירוף בפני-עצמו, ונשים לב שכולם שווים ל.

והמספר הדרוש הוא:

### שאלה 5

**א. מהו מספר הפתרונות בשלמים של המערכת:**

****

**הדרכה – הצב:  .**

האילוצים על הם: , והמשוואה היא:

נסמן את קבוצת הפתרונות של המערכת כך שכל המשתנים הם שלמים אי-שליליים, ואילו לא מקיים את האילוץ שלו.

נשים לב שמספר הפתרונות של המערכת (בשלמים אי-שליליים) ללא אילוצים ("העולם כולו") הוא כמספר האפשרויות לסדר בשורה 13 כדורים ו3 מחיצות, שהוא , ואילו כאשר ידוע שמשתנה מסוים אינו קטן מ אז נקבל וכו'.

מכיון שהקבוצות זרות בזוגות (כי האילוץ של חופף לאילוץ של ), לכן ניתן לעצור בשלב זה את החישובים ולהגיע לתוצאה:

### שאלה 6

**מצא את מספר האפשרויות לשים 500 כדורים זהים בתוך 3 תאים שונים כאשר בכל תא יש לכל היותר 180 כדורים.**

עולם הדיון הוא כל האפשרויות, שעוצמתו שקולה לסידור כל הכדורים בשורה עם 2 מחיצות.

הקבוצה היא מספר האפשרויות שבתא מספר ישנם יותר מ180 כדורים.

והתשובה הסופית היא:

### שאלה 7

**בחדר המשחקים של מתניה ואביעד נמצאים המשחקים האלה:**

**4 קוביות: כחולה, אדומה, ירוקה ולבנה.   
4 כדורים: כחול, אדום, ירוק ולבן  
4 מכוניות: כחולה, אדומה, ירוקה ולבנה.   
א. בכמה דרכים ניתן לחלק את 12 המשחקים ל 4 קבוצות, כאשר בכל קבוצה יש בדיוק כדור אחד, קוביה אחת ומכונית אחת? (אין חשיבות לסדר הקבוצות(**

מכיון שאין חשיבות לסדר הקבוצות – נסדר את הקבוצות לפי הכדורים: קבוצת הכדור הכחול, קבוצת הכדור האדום וכו'.

עכשיו הסדר כן משנה, ועלינו ליצור תמורה מהקוביות לקבוצות ואח"כ ליצור תמורה מהמכוניות לקבוצות, ולכן מספר הדרכים הוא:

**ב. בכמה מהדרכים הנ"ל , באף אחת   מהקבוצות אין 3 משחקים מאותו הצבע.**

נסמן את הקבוצות לפי הכדורים , כך שהקבוצה מכילה את הדרכים לסדר את המשחקים כך שכל הכחולים נמצאים בקבוצה אחת ובדומה לזה זה האדומים, זה הירוקים ו זה הלבנים.

בכל שורה עלינו לחשב את מספר הקבוצות מסוג זה המשתתפות בסכום, והוא שווה בשורה ה ל כי בוחרים קבוצות **שלא**  ישתתפו בחיתוך.

### שאלה 9

**מטילים 10 קוביות (שונות). מהו מספר התוצאות האפשריות בהן מתקבל כל אחד מהמספרים "1" עד "6" לפחות פעם אחת ? הסבר/י תשובתך!**

העולם הוא כל האפשרויות לתוצאות על הקוביות.

נסמן את קבוצת האפשרויות שהמספר לא הופיע כלל.

*ע"פ משפט ההכלה וההדחה מתקיים:*

ועכשיו נחשב את עוצמות הקבוצות:

יש קבוצות כאלו בסכום הנ"ל (ע"פ הגדרה).

יש קבוצות כאלו בסכום הנ"ל (ע"פ הגדרה).

יש קבוצות כאלו בסכום הנ"ל (כי צריך לבחור ארבעה מספרים מתוך ששה – המספרים המותרים בשימוש).

בדומה לכך כל האיברים הם במבנה של , ולכן הסכום הכללי הוא:

### שאלה 11

**מהו מספר תמורות אי סדר מלא של הקבוצה  בהן האיברים של הקבוצה  מופיעים ב  המקומות הראשונים?**

כמספר תמורות אי-סדר-מלא על הקבוצה כשהוא מוכפל במספר תמורות אי-סדר-מלא על הקבוצה :